НЕЯВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЁННЫХ ЗАДАЧ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ

Лабораторная работа №5, 6

План занятия:
1. Цель работы
2. Дифференциальные уравнения теплового пограничного слоя
3. Описание решаемой задачи
4. Метод решения
5. Порядок проведения моделирования
6. Содержание отчёта
7. Контрольные вопросы

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сопряжённый расчёт ламинарного динамического и теплового пограничных слоёв на пластине **по неявной схеме** с устранением нелинейности методом простых итераций.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Для решения задачи о неизотермическом течении в пограничном слое нам необходимо дополнить, рассмотренную на предыдущих лабораторных работах систему уравнений, **уравнением энергии**, и записать её в форме пригодной для расчётов сжимаемого течения (течения с переменной плотностью среды).

Если ограничиться рассмотрением действия только **силы давления, силы трения и силы тяжести**, в случае плоского сжимаемого течения и в физической системе координат уравнения **ламинарного пограничного слоя** можно записать следующим образом:

уравнение неразрывности (сохранения массы)**:**

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}=0, \tag{1}$$

уравнения движения (сохранения импульсов):
по оси x

$$\rho w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+\rho w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)-\frac{dp}{dx}+\rho g, \tag{2}$$

по оси y

$$p=\text{const} \tag{3}$$

Если рассматривать только работу силы давления, силы трения и ограничиться переносом тепла только теплопроводностью и конвекцией, то **уравнение энергии**, записанное через температуру, в приближении пограничного слоя можно записать так:

$$\rho w_x c_P\frac{\partial T}{\partial x}+\rho w_y c_P\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2+w_x\frac{dp}{dx} \tag{4}$$

Здесь: ρ - плотность движущейся среды [кг/м^3], w_x, w_y - продольная и поперечная скорость потока [м/с], p - давление [Па], g - ускорение свободного падения [м/с^2], μ - коэффициент динамической вязкости среды, [Па с] x, y - продольная и поперечная координаты, c_p - удельная массовая теплоёмкость среды, [Дж/(кг град)], T - температура потока, [K], λ - коэффициент теплопроводности среды, [Вт/(м град)].

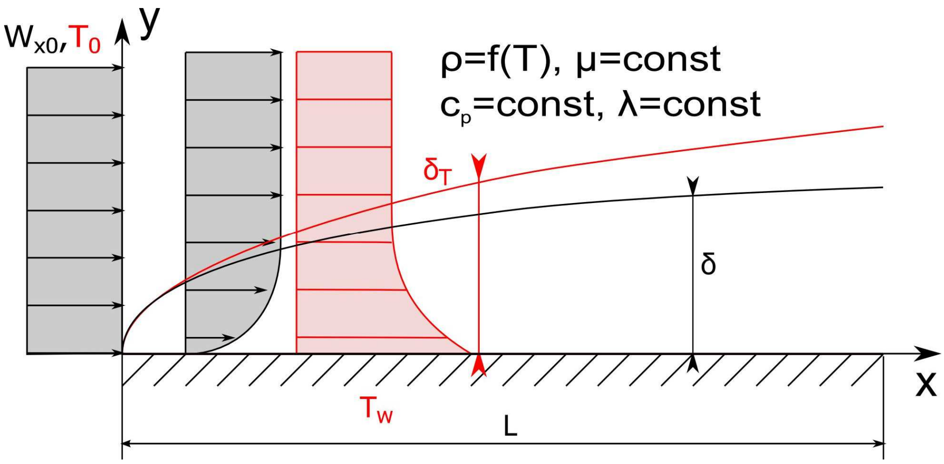
Очевидно, что для замыкания данной системы уравнений (1)-(4) необходимо задать связь плотности с температурой и давлением. Другими словами необходимо определить вид уравнения состояния, которому подчиняется рассматриваемая среда. В рамках данной работы мы будем считать, что параметры состоянии связаны **уравнением состояния идеального газа**. Это предположение, очевидно, справедливо только для газовых сред при низких давлениях.

$$p = \rho R T, \tag{5}$$

где: $R = 8314{,}31/M$ - газовая постоянная, [Дж/(кг град)], M - молекулярный вес, $[г/моль]$.

3. ОПИСАНИЕ РЕШАЕМОЙ ЗАДАЧИ

Целью сегодняшней лабораторной работы является освоение численного метода решения сопряжённых задач пограничного слоя. Сопряжёнными называются задачи, в которых решение одного уравнения из системы уравнений влияет на решение других уравнений. В частности, при решении задач неизотермического пограничного слоя возникает необходимость расчёта плотности в зависимости от температуры в каждой точке расчётной области, что в свою очередь (в случае сжимаемого течения) приводит к необходимости пересчёта полей продольной и поперечной компонентов вектора скорости потока. Схема исследуемого течения представлена на рисунке.



Будем считать, что динамическая вязкость, теплоёмкость и теплопроводность среды постоянны ($\mu = \text{const}, c_p = \text{const}, \lambda = \text{const}$). Градиенты давления и температуры вдоль пластины равны нулю и проекция вектора силы тяжести направлена поперёк течения. Система уравнений (1)-(5) в этом случае может быть упрощена и записана следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} = 0,\\
&\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2},\\
&\rho w_x c_P \frac{\partial T}{\partial x} + \rho w_y c_P \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2
\end{aligned} \tag{6}$$

Сохраним в уравнении энергии диссипативный член (работу против силы трения), хотя его влияние существенно только при высоких (околозвуковых и сверхзвуковых) скоростях набегающего потока.

Для решения данной системы уравнений определим граничные условия для искомых переменных w_x, w_y, T. В рассматриваемом случае:

на входе: $w_x(x,y) = w_x(0,y) = w_{x0}$; $w_y(x,y) = w_y(0,y) = 0$; $T(x,y) = T(0,y) = T_0$;

на стенке: $w_x(x,y) = w_x(x,0) = 0$; $w_y(x,y) = w_y(x,0) = 0$; $T(x,y) = T(x,0) = T_w$;

во внешнем потоке: $w_x(x,y) = w_x(x,\delta) = w_{x0}$; $T(x,y) = T(x,\delta) = T_0$.

Интегральные параметры рассматриваемого течения (коэффициент трения, коэффициент теплоотдачи, локальные и средние числа Нуссельта) в существенной степени будут определяться свойствами среды (числом Прандтля - $\Pr = \mu c_p / \lambda$), скоростью набегающего потока (числом Маха - $M_0 = w_{x0}/a_0$, где $a_0 = \sqrt{\gamma R T_0}$ - локальная скорость звука при параметрах набегающего потока, γ - показатель адиабаты) и фактором неизотермичности $\psi = T_w / T_0$.

Полного описания законов трения и теплообмена:

$$\begin{aligned} \frac{c_f}{2} &= f\left(\mathrm{Re}, \Pr, M_0, \psi\right) \\ \mathrm{Nu} &= f\left(\mathrm{Re}, \Pr, M_0, \psi\right) \end{aligned} \tag{7}$$

при любых значениях указанных чисел подобия на сегодняшний день не существует, а это означает, что даже в рамках лабораторной работы **вы можете получить оригинальные результаты**. Следует, однако, привести несколько известных корреляций.

Так **теплообмен в слабонеизотермических условиях при существенно дозвуковых скоростях обтекания и числе Прандтля равном единице** описывается следующим соотношением:

$$\boxed{\mathrm{Nu} = \frac{c_f}{2}\mathrm{Re} = 0{,}332\,\mathrm{Re}^{0{,}5}}\,. \tag{8}$$

Это соотношение следует из полной аналогии процессов теплообмена и трения в пограничном слое в данных условиях, на которую впервые указал Рейнольдс[1].

Если число Прандтля отлично от единицы, то полная аналогия Рейнольдса нарушается но, как показал, Польгаузен[2], выполняется **модифицированная аналогия Рейнольдса**:

$$\boxed{\mathrm{Nu} = \frac{c_f}{2}\mathrm{Re}\,\Pr^{1/3} = 0{,}332\,\mathrm{Re}^{0{,}5}\,\Pr^{1/3}}\,. \tag{9}$$

Экспериментально этот закон был подтверждён в опытах на газах и жидкостях в диапазоне чисел Прандтля от 0,6 до 20. Существует достаточно большое кол-во корреляции, полученных как экспериментально, так и теоретическими методами, однако диапазон их применимости не охватывает всех возможных значений определяющих параметров задачи.

---

[1] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М: Наука, 1974. – 713с.

[2] Pohlhausen K. Zur naherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht // ZAMM, vol.1, 1921, pp.252-268.

Локальный коэффициент сопротивления трения для рассматриваемой задачи принято рассчитывать по формуле:

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_w}{\rho w_{x0}^2}, \tag{10}$$

локальное число Нуссельта:

$$Nu = \frac{\alpha x}{\lambda} = \frac{q_w}{(T_0 - T_w)}\frac{x}{\lambda} = \frac{-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w}{(T_0 - T_w)}\frac{x}{\lambda}, \tag{11}$$

локальное число Рейнольдса:

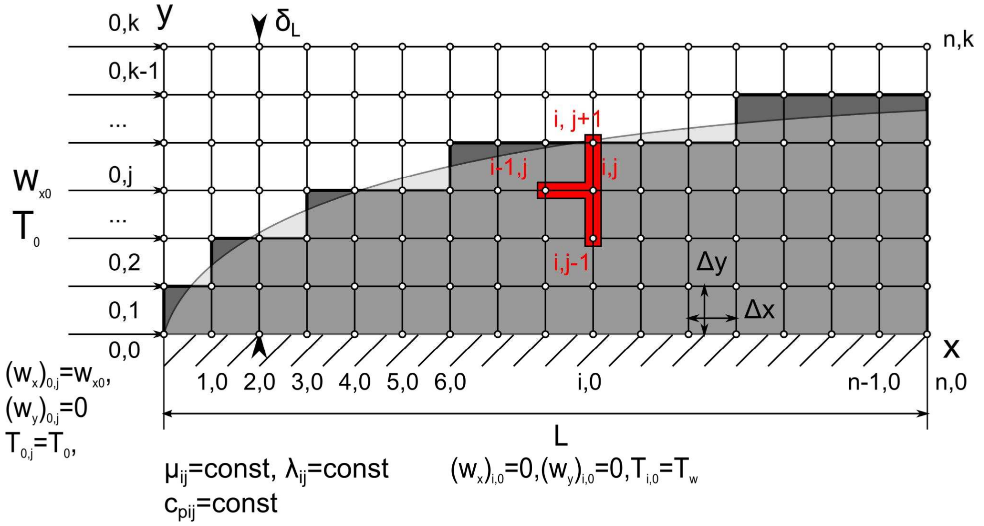
$$Re = \frac{\rho w_{x0} x}{\mu}, \tag{12}$$

за характерный размер выбрано расстояние от начала пластины, все свойства определяются по параметрам набегающего потока.

4. МЕТОД РЕШЕНИЯ

В данной лабораторной работе мы проведём дискретизацию уравнений **по неявной схеме** и получим их решение. Поскольку задача должна решаться **в сопряжённой постановке**, для получения совместного решения уравнения энергии и уравнений движения мы применим **метод простых итераций**. Одновременно применение этого метода позволит нам отказаться от метода запаздывающих коэффициентов для устранения нелинейности уравнений.

Введём сеточные функции $(w_x)_{i,j}$, $(w_y)_{i,j}$, $\rho_{i,j}$ и T_{ij} для продольной, поперечной составляющей вектора скорости w, плотности и температуры. Сеточные функции определены в точках расчётной сетки $(x_{i,j}, y_{i,j})$. Примем, что узлы расчётная сетка равномерная по оси x и по оси y. Кол-во узлов в расчётной сетке по оси x: $n = L/\Delta x$, а по оси y: $k = \delta_L/\Delta y$, где δ_L - выбранная заранее высота расчётной области, превышающая толщину как динамического, так и теплового пограничных слоёв на длине L, Δx - шаг дискретизации по оси x, Δy - шаг дискретизации по оси y. Дискретное множество точек и шаблон дискретизации представлены на рисунке ниже.

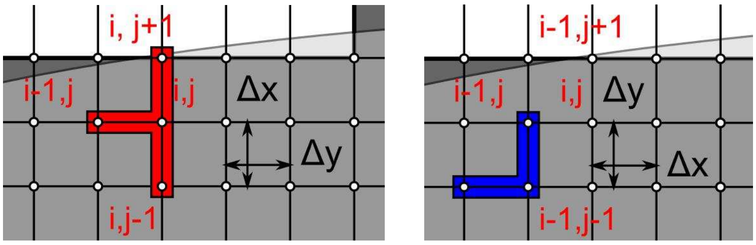


Высоту расчётной области определим из оценок толщин теплового и динамического пограничных слоёв при ламинарном режиме течения:

$$\delta_L = p \cdot \max\left(\frac{5L}{\sqrt{Re_L}}, \frac{5L}{\sqrt{Re_L \, Pr}}\right), \tag{13}$$

где: p - коэффициент запаса расчётной сетки.

Для **неявного метода** решения уравнений пограничного слоя шаблоны дискретизации для уравнений движения и энергии представлены на левом рисунке снизу, для уравнения неразрывности на правом:



Получим выражения для производных, входящих в уравнения (6), в алгебраической форме, используя разложение функций в ряд Тейлора по соответствующей переменной, по аналогии с предыдущей лабораторной работой:

$$\left(\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{(\rho w_x)_{i,j} - (\rho w_x)_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{(\rho w_y)_{i,j} - (\rho w_y)_{i,j-1}}{\Delta y},$$

$$\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{(w_x)_{i,j} - (w_x)_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{(w_x)_{i,j} - (w_x)_{i,j-1}}{\Delta y},$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y}.$$

Для вторых производных:

$$\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{(w_x)_{i,j+1} - 2\cdot(w_x)_{i,j} + (w_x)_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}.$$

Подставляя полученные соотношения в систему уравнений (6), можно записать дискретный аналог уравнений **теплового пограничного слоя**:

$$\begin{cases} \rho_{i,j}(w_x)_{i,j}\left(\dfrac{(w_x)_{i,j} - (w_x)_{i-1,j}}{\Delta x}\right) + \rho_{i,j}(w_y)_{i,j}\left(\dfrac{(w_x)_{i,j} - (w_x)_{i,j-1}}{\Delta y}\right) = \mu\left(\dfrac{(w_x)_{i,j+1} - 2(w_x)_{i,j} + (w_x)_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right); \\ \dfrac{\rho_{i,j-1}(w_x)_{i,j-1} - \rho_{i-1,j-1}(w_x)_{i-1,j-1}}{\Delta x} + \dfrac{\rho_{i,j}(w_y)_{i,j} - \rho_{i,j-1}(w_y)_{i,j-1}}{\Delta y} = 0; \\ c_p\rho_{i,j}(w_x)_{i,j}\left(\dfrac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x}\right) + c_p\rho_{i,j}(w_y)_{i,j}\left(\dfrac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y}\right) = \lambda\left(\dfrac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right) + \mu\left(\dfrac{(w_x)_{i,j} - (w_x)_{i,j-1}}{\Delta y}\right)^2; \\ \rho_{i,j} = p / RT_{ij}. \end{cases} \tag{14}$$

Следует обратить внимание на то, что на расчётном i-ом слое по координате x неизвестными в системе уравнений (14) являются сразу несколько переменных $(w_x)_{i,j+1}, (w_x)_{i,j}, (w_x)_{i,j-1}$, $(w_y)_{i,j}$, $T_{i,j+1}, T_{i,j}, T_{i,j-1}$ и ρ_{ij}. Однако каждая неизвестная связана с решением на соседних по j узлах расчётной сетки. Уравнение неразрывности и уравнение состояния идеального газа решаются явно. Для уравнений движения и энергии запишем выражения для коэффициентов трёхдиагональной матрицы:

$$
\begin{gathered}
\underbrace{\left(-\frac{\rho_{i,j}(w_y)_{i,j}}{\Delta y}-\frac{\mu}{\Delta y^2}\right)}_{a_j}(w_x)_{i,j-1}+\underbrace{\left(\frac{\rho_{i,j}}{\Delta x}(w_x)^*_{i,j}+\frac{\rho_{i,j}(w_y)_{i,j}}{\Delta y}+2\frac{\mu}{\Delta y^2}\right)}_{b_j}(w_x)_{i,j}-\\
\underbrace{-\frac{\mu}{\Delta y^2}}_{c_j}(w_x)_{i,j+1}=\underbrace{\frac{\rho_{i,j}(w_x)^*_{i,j}}{\Delta x}(w_x)_{i-1,j}}_{d_j};\\
\underbrace{\left(-\frac{c_p\rho_{i,j}(w_y)_{i,j}}{\Delta y}-\frac{\lambda}{\Delta y^2}\right)}_{a_j}T_{i,j-1}+\underbrace{\left(\frac{c_p\rho_{i,j}(w_x)_{i,j}}{\Delta x}+\frac{c_p\rho_{i,j}(w_y)_{i,j}}{\Delta y}+2\frac{\lambda}{\Delta y^2}\right)}_{b_j}T_{i,j}-\\
\underbrace{-\frac{\lambda}{\Delta y^2}}_{c_j}T_{i,j+1}=\underbrace{\frac{c_p\rho_{i,j}(w_x)_{i,j}}{\Delta x}T_{i-1,j}+\mu\left(\frac{(w_x)_{i,j}-(w_x)_{i,j-1}}{\Delta y}\right)^2}_{d_j}.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Коэффициенты трёхдиагональной матрицы для граничных условий определяются следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\boxed{0(w_x)_{i,-1}}+1(w_x)_{i,0}+0(w_x)_{i,1}=0\ \Rightarrow \boxed{(w_x)_{i,0}=0}\\
\boxed{0(w_x)_{i,k-1}}+1(w_x)_{i,k}+\boxed{0(w_x)_{i,k+1}}=w_{x0}\Rightarrow \boxed{(w_x)_{i,k}=w_{x0}}\\
\boxed{0T_{i,-1}}+1T_{i,0}+0T_{i,1}=T_w\Rightarrow \boxed{T_{i,0}=T_w}\\
\boxed{0T_{i,k-1}}+1T_{i,k}+\boxed{0T_{i,k+1}}=T_0\Rightarrow \boxed{T_{i,k}=T_0}
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Объединяя уравнения (15), (16) и записывая систему линейных уравнений в матричной форме, получим две **трёхдиагональных матрицы, которые можно решить методом Томаса**.

Поскольку в рассматриваемой задаче решение уравнения энергии влияет на решение уравнений движения и неразрывности и наоборот, то на каждом шаге интегрирования необходимо свести решения отдельных уравнений к общему решению. Для этого можно применить **метод простых итераций** (метод простой итерационной замены переменных). Для получения решения методом простых итераций необходимо:

1. Сохранить значения всех переменных на i-ом слое в массивах промежуточных значений переменных $\rho^*_{i,j}, T^*_{i,j}, (w_x)^*_{i,j}, (w_y)^*_{i,j}$;

2. Получить новое решение уравнений $\rho_{i,j}, T_{i,j}, (w_x)_{i,j}, (w_y)_{i,j}$;

3. Сравнить полученное решение с сохранённым во всех точках на i-ом слое:

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\rho_{i,j}^{*}-\rho_{i,j}\right)/\rho_{i,j}\right|\le\varepsilon\\
&\left|\left(T_{i,j}^{*}-T_{i,j}\right)/T_{i,j}\right|\le\varepsilon\\
&\left|\left(\left(w_x\right)_{i,j}^{*}-\left(w_x\right)_{i,j}\right)/\left(w_x\right)_{i,j}\right|\le\varepsilon\\
&\left|\left(\left(w_y\right)_{i,j}^{*}-\left(w_y\right)_{i,j}\right)/\left(w_y\right)_{i,j}\right|\le\varepsilon
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

4. Если необходимая относительная погрешность вычислений - ε в решении не достигнута, повторить итерацию.

Для решения уравнений пограничного слоя обычно достаточно обеспечить $\varepsilon = 10^{-3}$, для чего требуется от 3 до 10 итераций на каждом на i-ом шаге. Скорость сходимости решения**, как правило,** увеличивается по мере роста толщины пограничного слоя и снижения градиентов скорости и температуры на стенке.

5. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Получить задание для моделирования течения и теплообмена в ламинарном пограничном слое на пластине:

Среда: Давление для всех случаев равно 101325 Па.

	μ, [Па с]	c_p, [Дж/(кг град)]	λ, [Вт/(м град)]	M, [г/моль]	γ
Воздух (20^0С)	0,0000185	1005	0,026	29	1,41
Гелий (-40^0С)	0,0000167	5188	0,131	4	1,67
Водяной пар	0,0000161	1940	0,033	18	1,31
Гелий-ксеноновая смесь (95% ксенона) (200^0С)	0,0000382	410	0,067	50	1,67
Гелий-ксеноновая смесь (50% ксенона) (100^0С)	0,0000263	2675	0,160	7,8	1,67

Длина пластины:

Скорость набегающего потока:

Температура набегающего потока:

Температура стенки:

2. Подготовить программу на языке Fortran, реализующую неявный метод численного интегрирования уравнений динамического и теплового пограничных слоёв с устранением нелинейности и сопряжённости простым итерационным методом.

3. Провести компиляцию и отладку программы.

4. Выполнить расчёты профилей скорости и температуры на расстоянии 20, 40, 60, 80 ,100 % от длины пластины. Построить графики в программе Excel, Origin или др. Сделать выводы о росте толщины динамического и теплового пограничных слоёв.

Сделать вывод о влиянии числа Прандтля газа на отношение толщин теплового и динамического пограничных слоёв. Занести полученные данные в отчёт.

5. Выполнить расчёты интегральных параметров течения (локального коэффициента поверхностного трения, числа Нуссельта) в зависимости от локального числа Рейнольдса. Построить графики зависимости коэффициента трения и числа Нуссельта от числа Рейнольдса в логарифмических координатах. Нанести на график формулы

$$\boxed{\mathrm{Nu} = \frac{c_f}{2}\mathrm{Re} = 0,332\,\mathrm{Re}^{0,5}} \text{ и}$$

$$\boxed{\mathrm{Nu} = \frac{c_f}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}^{1/3} = 0,332\,\mathrm{Re}^{0,5}\,\mathrm{Pr}^{1/3}}.$$

Сделать выводы о влиянии числа Прандтля и числа Маха на сопротивление пластины и теплоотдачу от её сетки. Занести полученные результаты в отчёт.

6. Занести текст программы в отчёт.

7. Оформить отчёт. Подготовиться к защите лабораторной работы.

6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЁТА

1. Титульный лист.

2. Цель работы.

3. Схема решаемой задачи с указанием расчётной области, граничных условий и параметров задачи.

4. Основные формулы, используемые при расчетах.

5. Результаты моделирования.

6. Тексты программ.

7. Выводы по работе.

7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется тепловым пограничным слоем?

2. На каком шаблоне записывается дискретная форма уравнений пограничного слоя при неявном методе решения?

3. Что такое полная и модифицированная аналогии Рейнольдса?

4. Каково влияние числа Прандтля на толщину теплового пограничного слоя?

5. Что такое число Маха?

6. Объясните, что физически означает каждый член в уравнении энергии?

7. Как записываются граничные условия для уравнения энергии в дискретной форме при решении уравнения неявным методом?